Отчёт по лабораторной работе №4

Алгоритмы Евклида нахождения наибольшего общего делителя

Хитяев Евгений Анатольевич НПМмд-02-21

Содержание

# 1 Цель работы

Изучение алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) и его вариаций.

# 2 Теоретические сведения

## 2.1 Наибольший общий делитель

Наибольший общий делитель (НОД) – это число, которое делит без остатка два числа и делится само без остатка на любой другой делитель данных двух чисел. Проще говоря, это самое большое число, на которое можно без остатка разделить два числа, для которых ищется НОД.

## 2.2 Алгоритм Евклида

При работе с большими составными числами их разложение на простые множители, как правило, неизвестно. Но для многих прикладных задач теории чисел поиск разложения числа на множители является важной, часто встречающейся практической задачей. В теории чисел существует сравнительно быстрый способ вычисления НОД двух чисел, который называется алгоритмом Евклида.

\*\* Алгоритм Евклида: \*\*

* Вход. Целые числа .
* Выход. НОД.

1. Положить , , .
2. Найти остаток от деления на .
3. Если , то положить . В противном случае положить и вернуться на шаг 2.
4. Результат: .

Пример: Найти НОД для чисел 22 и 10.

22 / 10 = 2 (остаток 2)

10 / 2 = 5 (остаток 0)

Таким образом, НОД = 2.

## 2.3 Бинарный алгоритм Евклида

Бинарный алгоритм Евклида вычисления НОД оказывается более быстрым при реализации этого алгоритма на компьютере, поскольку использует двоичное представление чисел а и b. Бинарный алгоритм Евклида основан на следующих свойствах наибольшего общего делителя (считаем, что 0 < b ≤ а).

* Вход. Целые числа .
* Выход. HOД.

1. Положить .
2. Пока оба числа и четные, выполнять до получения хотя бы одного нечетного значения или .
3. Положить .
4. Пока , выполнять следующие действия.
   * Пока четное, полагать .
   * Пока четное, полагать .
   * При положить . В противном случае положить .
5. Положить .
6. Результат:

## 2.4 Расширенный алгоритм Евклида

Расширенный алгоритм Евклида находит наибольший общий делитель d чисел а и b и его линейное представление, т. е. целые числа x и у, для которых ах + by = d, и не требует «возврата», как в рассмотренном примере. Пусть d – НОД для a и b, т. е. d = (a, b), где a > b. Тогда существуют такие целые числа x и y, что d = ax +by. Иными словам, НОД двух чисел можно представить в виде линейной комбинации этих чисел с целыми коэффициентами

* Вход. Целые числа .
* Выход: НОД; такие целые числа , что .

1. Положить
2. Разделить с остатком на :
3. Если , то положить , , . В противном случае положить , , и вернуться на шаг 2.
4. Результат: .

# 3 Выполнение работы

## 3.1 Реализация алгоритмов Евклида на языке Python

def evklid\_algorithm(a, b):  
 while a != 0 and b != 0:  
 if a >= b:  
 a %= b  
 else:  
 b %= a  
 return a or b  
  
def evklid\_bin\_algorithm(a, b):  
 g = 1  
 while (a % 2 == 0 and b % 2 == 0):  
 a = a/2  
 b = b/2  
 g = 2\*g  
 u, v = a, b  
 while u != 0:  
 if u % 2 == 0:  
 u = u/2  
 if v % 2 == 0:  
 v = v/2  
 if u >= v:  
 u = u - v  
 else:  
 v = v - u  
 d = g\*v  
 return d  
  
def evklid\_extended(a, b):  
 if a == 0:  
 return(b, 0, 1)  
 else:  
 div, x, y = evklid\_extended(b % a, a)  
 return(div, y - (b // a) \* x, x)  
  
def evklid\_bin\_extended(a, b):  
 g = 1  
 while (a % 2 == 0 and b % 2 == 0):  
 a = a/2  
 b = b/2  
 g = 2\*g  
 u = a  
 v = b  
 A = 1  
 B = 0  
 C = 0  
 D = 1  
 while u != 0:  
 if u % 2 == 0:  
 u = u/2  
 if A % 2 == 0 and B % 2 == 0:  
 A = A/2  
 B = B/2  
 else:  
 A = (A+b)/2  
 B = (B-a)/2  
 if v % 2 == 0:  
 v = v/2  
 if C % 2 == 0 and D % 2 == 0:  
 C = C/2  
 D = D/2  
 else:  
 C = (C+b)/2  
 D = (D-a)/2  
 if u >= v:  
 u = u - v  
 A = A - C  
 B = B - D  
 else:  
 v = v - u  
 C = C - A  
 D = D - B  
 d = g\*v  
 x = C  
 y = D  
 return (d, x, y)  
  
def main():  
 a = int(input("Введите число a: "))  
 b = int(input("Введите число b: "))  
 if a > 0 and 0 < b <= a:  
 print("Алгоритм Евклида: ", evklid\_algorithm(a, b))  
 print("Бинарный алгоритм Евклида: ", evklid\_bin\_algorithm(a, b))  
 print("Расширенный алгоритм Евклида: ", evklid\_extended(a, b))  
 print("Расширенный бинарный алгоритм Евклида: ", evklid\_bin\_extended(a, b))  
  
main()

## 3.2 Контрольный пример

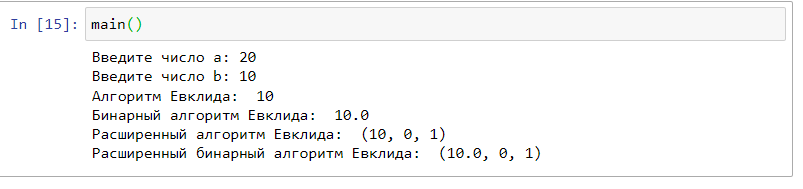


Figure 1: Пример работы алгоритмов Евклида

# 4 Выводы

В ходе выполнения работы мне удалось изучить алгоритмы Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) и его вариаций, а также реализовать данные алгоритмы программно на языке Python.

# Список литературы

1. [ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ](http://ikit.edu.sfu-kras.ru/files/15/l2.pdf)
2. [В очередной раз о НОД](https://habr.com/ru/post/464949/)